Permutációk
(Permutácie)

Az ismétlés nélküli permutációk tulajdonképpen az ismétlés nélküli variációk egy speciális esete, mikor az alaphalmaz elemeinek a száma (n) megegyezik a osztály számával (k). Ez azt jelenti, hogy a teljes halmazt rendezzük.

D. *n elem* (*ismétlés nélküli*) *permutációi* (permutácie [bez opakovania] n prvkov) az n elemű halmazból képezett rendezett elemn-esek összessége, ahol az egyes elemn-esekben az elemek nem ismétlődhetnek. (n elem permutációi az n elemű halmaz összes sorrendbe rendezése.)

A permutációk számát megkapjuk, ha az ismétlés nélküli variációk számának kiszámítására szolgáló képletben n-t írunk a k helyére.

$$P(n) = V_n(n) = \underbrace{n.(n-1).(n-2).\dots.(n-n+1)}_{\text{n tényező}} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$$

T. Az ismétlés nélküli permutációk számát az alábbi képlet segítségével számolhatjuk:

$$P(n) = n!$$

Az alaphalmaznak nem szabad tartalmaznia azonos elemeket. Ha valamely elemek megegyeznek, ezek felcserélésével nem keletkezik új (más) rendezett elemn-es. Ezen esetek az ismétléses permutációkhoz tartoznak.

Adott az alaphalmazunk, mely tartalmaz néhány azonos elemet:

az 1-es típusú elem k_1-szer fordul elő; a 2-es típusú k_2-ször; … ; az r típusú elem k_r-szer

érvényes, hogy az egyes típusokhoz tartozó elemek számainak összege megegyezik az teljes n elemszámmal

$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = n$

Vegyük az elemek egy permutációját (a halmaz egy rendezését). Az egyik csoportban (például az i csoportban) van két azonos elem ($k_i = 2$):

ha pont ezt a két elemet cseréljük fel, az eredmény ugyanaz ⇒ a permutációk száma feleakkora lesz

Ha egy másik csoportban (például a j csoportban) három azonos elem van ($k_j = 3$):

ha a háromból kettőt felcserélek, az eredmény ugyanaz

ABC; ACB; BAC; BCA; CAB; CBA – ezek mind ugyanazt a permutációt jelentik

⇒ a permutációk száma hatoda lesz az eredetinek

Vagyis az ismétlés nélküli permutációk számát osztani kell az egyes csoportokba lévő elemek permutációinak szorzatával.

T. Az ismétléses permutációk számát az alábbi képlet segítségével számolhatjuk:

$$P'_{k_1;k_2;\ldots;k_r}(n) = \frac{n!}{k_1!.k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}$$

M. Ha vannak olyan elemek, melyek csak egyszer fordulnak elő az alaphalmazban (1 elemszámú csoportok), ezek faktoriálisa (a képlet nevezőjében) eggyel egyenlők. Ezért a képlet nevezőjében elegendő azon csoportok elemszámának faktoriálisát felsorolni, amik egytől különböznek (többelemű csoportok).

példa:

Soroljuk fel a k, l, m, n, o elemekből képzett ismétlés nélküli permutációkat.

[k; l; m; n; o], [k; l; m; o; n], [k; l; n; m; o], [k; l; n; o; m], [k; l; o; m; n], [k; l; o; n; m],
[k; m; l; n; o], [k; m; l; o; n], [k; m; n; l; o], [k; m; n; o; l], [k; m; o; l; n], [k; m; o; n; l],
[k; n; l; m; o], [k; n; l; o; m], [k; n; m; l; o], [k; n; m; o; l], [k; n; o; l; m], [k; n; o; m; l],
[k; o; l; m; n], [k; o; l; n; m], [k; o; m; l; n], [k; o; m; n; l], [k; o; n; l; m], [k; o; n; m; l],
[l; k; m; n; o], [l; k; m; o; n], [l; k; n; m; o], [l; k; n; o; m], [l; k; o; m; n], [l; k; o; n; m],
[l; m; k; n; o], [l; m; k; o; n], [l; m; n; k; o], [l; m; n; o; k], [l; m; o; k; n], [l; m; o; n; k],
[l; n; k; m; o], [l; n; k; o; m], [l; n; m; k; o], [l; n; m; o; k], [l; n; o; k; m], [l; n; o; m; k],
[l; o; k; m; n], [l; o; k; n; m], [l; o; m; k; n], [l; o; m; n; k], [l; o; n; k; m], [l; o; n; m; k],
[m; k; l; n; o], [m; k; l; o; n], [m; k; n; l; o], [m; k; n; o; l], [m; k; o; l; n], [m; k; o; n; l],
[m; l; k; n; o], [m; l; k; o; n], [m; l; n; k; o], [m; l; n; o; k], [m; l; o; k; n], [m; l; o; n; k],
[m; n; k; l; o], [m; n; k; o; l], [m; n; l; k; o], [m; n; l; o; k], [m; n; o; k; l], [m; n; o; l; k],
[m; o; k; l; n], [m; o; k; n; l], [m; o; l; k; n], [m; o; l; n; k], [m; o; n; k; l], [m; o; n; l; k],

[n; k; l; m; o], [n; k; l; o; m], [n; k; m; l; o], [n; k; m; o; l], [n; k; o; l; m], [n; k; o; m; l],
[n; l; k; m; o], [n; l; k; o; m], [n; l; m; k; o], [n; l; m; o; k], [n; l; o; k; m], [n; l; o; m; k],
[n; m; k; l; o], [n; m; k; o; l], [n; m; l; k; o], [n; m; l; o; k], [n; m; o; k; l], [n; m; o; l; k],
[n; o; k; l; m], [n; o; k; m; l], [n; o; l; k; m], [n; o; l; m; k], [n; o; m; k; l], [n; o; m; l; k],
[o; k; l; m; n], [o; k; l; n; m], [o; k; m; l; n], [o; k; m; n; l], [o; k; n; l; m], [o; k; n; m; l],
[o; l; k; m; n], [o; l; k; n; m], [o; l; m; k; n], [o; l; m; n; k], [o; l; n; k; m], [o; l; n; m; k],
[o; m; k; l; n], [o; m; k; n; l], [o; m; l; k; n], [o; m; l; n; k], [o; m; n; k; l], [o; m; n; l; k],
[o; n; k; l; m], [o; n; k; m; l], [o; n; l; k; m], [o; n; l; m; k], [o; n; m; k; l], [o; n; m; l; k]

Hány különböző ötjegyű számot alkothatunk a 0; 1; 2; 3; 4 számjegyekből úgy, hogy öttel osztható legyen?

egy szám akkor osztható 5-tel, ha nullára vagy ötre végződik ⇒ nulla lesz az utolsó jegy
csak az első négy számjegyet kell sorba rendeznünk

$P(4) = 4! = 24$

Hányféleképp lehet a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyeket sorba rendezni, hogy hétjegyű szám keletkezzen?

nulla nel lehet az első jegy ⇒ az összes lehetséges sorrend darabszámából levonjuk azokat, melyek nullával kezdődenek

$P(7) – P(6) = 7! – 6! = 5\,040 – 720 = 4\,320$

Hány elemből készíthető 3 628 000 ismétlés nélküli permutáció?

$n \in \mathbb{N}$

$P(n) = 3\,628\,000$

$n! = 3\,628\,000$

$$\begin{aligned}
3\,628\,000 : 2 &= 1\,814\,400\\
1\,814\,400 : 3 &= 604\,800\\
604\,800 : 4 &= 151\,200\\
151\,200 : 5 &= 30\,240\\
30\,240 : 6 &= 5\,040\\
5\,040 : 7 &= 720\\
720 : 8 &= 90\\
90 : 9 &= 10\\
10 : 10 &= 1
\end{aligned}$$

$n = 10$

Ha az elemek n számát kettővel növeljük, a permutációk száma 56-szorosárá nő. Határozzuk meg n értékét!

$n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
P(n + 2) &= P(n).56\\
(n + 2)! &= n!.56\\
(n + 2)(n + 1).n! &= n!.56 && /:n!\\
(n + 2)(n + 1) &= 56\\
n^2 + 3n + 2 &= 56 && /-56\\
n^2 + 3n – 54 &= 0\\
(n + 9)(n – 6) &= 0
\end{aligned}$$

$n + 9 = 0$ $\quad$ $n – 6 = 0$

$n_1 = -9$ $\quad$ $n_2 = 6$

Ha az elemek n számát hárommal növeljük, a permutációk száma 1 716-szorosárá nő. Határozzuk meg n értékét!

$n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
P(n + 3) &= P(n).1\,716\\
(n + 3)! &= n!.1\,716\\
(n + 3)(n + 2)(n + 1).n! &= n!.1\,716 && /:n!\\
(n + 3)(n + 2)(n + 1) &= 1\,716
\end{aligned}$$

a zárójelek felbontásával harmadfokú egyenletet kapnánk, amit nem tudunk megoldani
de körülbelül azonos értéket kapunk, ha a szélső tényezőket a középsővel helyettesítjük

$$(n+3)(n+2)(n+1) \approx (n+2)^3$$
$$(n+2)^3 \approx 1\,716 \qquad /\sqrt[3]{\ }$$
$$n+2 \approx 11{,}97$$
$$n+2 = 12$$
$$n = 10$$

Hány különböző hétjegyű számot alkothatunk az 1; 1; 1; 2; 2; 5; 8 számjegyekből?

a számjegyek ismétlődnek ⇒ ismétléses permutációk lesznek

számjegy	csoport	elemszám
1	k_1	3
2	k_2	2
5	k_3	1
8	k_4	1

a számjegyek száma – $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 7$

$$P'_{3;2;1;1}(7) = \frac{7!}{3!.2!.1!.1!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!.2} = 420$$

Hány különböző permutációja van a matematika szónak?

néhány betű ismétlődik ⇒ ismétléses permutációk lesznek

gyűjtsük a betűket csoportokba – melyik betű hányszor fordul elő

betű	csoport	elemszám
m	k_1	2
a	k_2	3
t	k_3	2
e	k_4	1
i	k_5	1
k	k_6	1

a betűk száma – $n = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 10$

$$P'_{2;3;2;1;1;1}(10) = \frac{10!}{2!.3!.2!.1!.1!.1!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.3!.2} = 151\,200$$