Ismétlés nélküli variációk
(Variácie bez opakovania)

rendezett elemk-s (usporiadaná k-tica [prvkov]) – k elem adott sorrendben (függ a sorrendtől)

jelölés: $[x_1; x_2; x_3; \dots ; x_k]$ vagy $(x_1; x_2; x_3; \dots ; x_k)$

$(x_1; x_2; \dots ; x_i; \dots ; x_j; \dots ; x_k) = (x_1; x_2; \dots ; x_j; \dots ; x_i; \dots ; x_k) \Leftrightarrow x_i = x_j$

D. ***n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációja*** (variácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania) az n elemű halmazból képezett rendezett elemk-sok összessége, ahol az egyes elemk-sokban az elemek nem ismétlődhetnek.

M. Mivel például egy ötelemű halmazból nem tudunk létrehozni rendezett hatosokat anélkül, hogy legalább egy elemet ne használnánk többször (ami nem megengedett), a k értéke legfeljebb n lehet (a variációk különleges esete, mikor k = n → ezek az úgynevezett permutációk lesznek:

$k < n$

T. Az ismétlés nélküli variációk számát az alábbi képlet segítségével számolhatjuk:

$$V_k(n) = \underbrace{n.(n-1).(n-2).\dots.(n-k+1)}_{\text{k tényező}}$$

M. A számológépeken az ismétlés nélküli variációt megtalálhatjuk (nem mindegyik tudományoson), mint az *n*P*r* funkciót.

D. Egy természetes szám ***faktoriális***a az egytől az n-ig terjedő természetes számok szorzata.

$n! := 1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots \cdot(n-1)\cdot n$

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ ez az alak előnyösebb a rendezésnél

$0! := 1$

M. A faktoriális megtalálható a tudományos számológépeken: *x*! vagy *n*! függvényként. Viszont a számológépek számításai korlátozottak. A legnagyobb szám, amit még ábrázol a: 9.999999999^{99}, ami a $9{,}999\,999\,999.10^{99}$ számot jelenti – vagyis a tizedesvesszőt 99 hellyel jobbra helyezni. Így a legnagyobb szám, aminek a faktoriálisát még képes megjeleníteni a $69! = 1.711224524^{98}$. De a faktoriális létezik nagyobb számoknak is, csak a számológép nem képes ábrázolni (pl. Excel-ben: FACT(100) = 100! = 9,33262154439442E+157 = $9{,}33262154439442.10^{157}$).

M. Egy nagyobb szám faktoriálisa nagyobb érték. Ezért a nagyobb szám vagy kifejezés faktoriálisát ki lehet fejezni egy kisebb szám vagy kifejezés faktoriálisaként.

$10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1$
$8! = 8.7.6.5.4.3.2.1$
$10! = 10.9.8!$

$(n+3)! = (n+3).(n+2).(n+1).n.(n-1).(n-2)\cdot\dots\cdot 3.2.1$
$n! = n.(n-1).(n-2)\cdot\dots\cdot 3.2.1$
$(n+3)! = (n+3).(n+2).(n+1).n!$

$(n-2)! = (n-2).(n-3)\cdot\dots\cdot 3.2.1$
$n! = n.(n-1).(n-2)!$

T. A faktoriális fogalmának bevezetése után az ismétlés nélküli variációk számát meghatározó képlet új alakot ölt:

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

példa:

Soroljuk fel az a, b, c, d, e elemekből képzett harmadosztályú ismétlés nélküli variációit!

valami rendszer alapján kell haladnunk, hogy ki ne hagyjunk, vagy meg ne ismételjünk semelyik elemhármast

[a; b; c], [a; b; d], [a; b; e], [a; c; b], [a; c; d], [a; c; e],
[a; d; b], [a; d; c], [a; d; e], [a; e; b], [a; e; c], [a; e; d],
[b; a; c], [b; a; d], [b; a; e], [b; c; a], [b; c; d], [b; c; e],
[b; d; a], [b; d; c], [b; d; e], [b; e; a], [b; e; c], [b; e; d],
[c; a; b], [c; a; d], [c; a; e], [c; b; a], [c; b; d], [c; b; e],
[c; d; a], [c; d; b], [c; d; e], [c; e; a], [c; e; b], [c; e; d],

[d; a; b], [d; a; c], [d; a; e], [d; b; a], [d; b; c], [d; b; e],
[d; c; a], [d; c; b], [d; c; e], [d; e; a], [d; e; b], [d; e; c],
[e; a; b], [e; a; c], [e; a; d], [e; b; a], [e; b; c], [e; b; d],
[e; c; a], [e; c; b], [e; c; d], [e; d; a], [e; d; b], [e; d; c]

Hány rendezett elemnégyes hozható létre tíz elemből, ha bennük az elemek nem ismétlődhetnek?

$V_4(10) = 10.9.8.7 =$ 5 040

Hány különböző ötjegyű természetes szám alkotható az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számjegyekből, ha egyik számjegy sem ismétlődik?

$V_5(7) = 7.6.5.4.3 =$ 2 520

Hány különböző ötjegyű természetes szám alkotható a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyekből, ha egyik számjegy sem ismétlődik?

most is öt elem van, csak közöttük van a nulla, ami nem kerülhet az első helyre – ekkor a szám csak négyjegyű lenne

számoljunk képlet nélkül – az első helyre: hat lehetőség

a második helyre: ismét hat lehetőség (a nullával együtt); a harmadikra: öt; a negyedikre: négy; az ötödikre: három

6.6.5.4.3 = 2 160

És hogy lehetett volna ezt képlettel számolni?

kiszámolni az ötjegyűeket (beleértve azokat a számokat is, amik nullával kezdődnek)

ezután ebből levonni annyit, amennyi a keletkezett számokból nullával kezdődik – vagyis a négyjegyű számok mennyiségét, amit a nulla nélkül a számjegyekből képezhetünk (1; 2; 3; 4; 5; 6)

$V_5(7) – V_4(6) = 7.6.5.4.3 – 6.5.4.3 = 2\ 520 – 360 =$ 2 160

Hány különböző négyjegyű páros szám alkotható az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 számjegyekből, ha egyik számjegy sem ismétlődik?

egy szám páros, ha páros számra végződik

ezért most a végétől kezdünk

az utolsó helyre (a negyedikre) csak a 2; 4 vagy 6 mehet – három lehetőség

a harmadikra hat (egy számjegyet már felhasználtunk); a másodikra öt; az első helyre pedi négy számjegy maradt

3.6.5.4 = 360 = $3.V_3(6)$

Hány különböző négyjegyű páros szám alkotható a 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 számjegyekből, ha egyik számjegy sem ismétlődik?

a hét szájegyből most négy páros – az utolsó helyre négy lehetőségünk van

4.6.5.4 = 480 = $4.V_3(6)$

Hány különböző négyjegyű páros szám alkotható a 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyekből, ha egyik számjegy sem ismétlődik?

a nulla bonyolítja a feladatot: nem kerülhet előre (a keletkező szám nem lenne négyjegyű), de a végére helyezve páros szám keletkezik

ezért felosztjuk számításasinkat: mikor a szám nullára végződik ↔ és amikor nem

ha a végén van a nulla, akkor az előtte lévő három helyet kell kitölteni a maradék számjegyekből

$V_3(6) = 120$

ha nem végződik nullára, akkor 2; 4 vagy 6 az utolsó számjegy – ez három lehetőséget jelent

folytatjuk az elején: a maradék számjegyek a nulla nélkül – öt lehetőség (1; 2; 3; 4; 5; 6 – az egyik páros számjegy nélkül, amit a végén már felhasználtunk)

a második helyre ismét öt lehetőség – a maradék négy számjegy meg a nulla

a harmadikra pedig négy számjegyünk marad

3.5.5.4 = 300

a két számítás összege adja a választ a kérdésünkre

120 + 300 = 420

Hány különböző elemből képezhető 1 806 másodosztályú ismétlés nélküli variáció?

$n \geq 2$

$n \in \mathbb{N}$

$$V_2(n) = 1\,806$$
$$n.(n-1) = 1\,806$$
$$n^2 - n = 1\,806 \qquad /-1\,806$$
$$n^2 - n - 1\,806 = 0$$
$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1\,806)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 7\,224}}{2} = \frac{1 \pm 85}{2} = \begin{matrix} \nearrow 43 \\ \searrow -42 \end{matrix}$$

Hány különböző elemből hozható létre 35 904 harmadosztályú ismétlés nélküli variáció?

$n \geq 3$

$n \in \mathbb{N}$

$$V_3(n) = 35\,904$$
$$n.(n-1).(n-2) = 35\,904$$
$$n.(n^2 - 3n + 2) = 35\,904$$
$$n^3 - 3n^2 + 2n = 35\,904$$
$$n^3 - 3n^2 + 2n - 35\,904 = 0$$
$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + \mathit{3n} - \mathit{1} \approx n^3 - 3n^2 + \mathit{2n}$, preto
$$(n-1)^3 \approx 35\,904$$
$$n - 1 \approx \sqrt[3]{35\,904} = 32{,}99$$
$$n = 34$$

Ha megnöveljük az n elemszámot kettővel, a belőle képzett harmadosztályú ismétlés nélküli variációk száma a tízszeresére nő. Mennyi elemünk volt?

$n \geq 3$

$n \in \mathbb{N}$

$$V_3(n+2) = 10.V_3(n)$$
$$(n+2).(n+1).n = 10.n.(n-1).(n-2) \qquad /:n$$
$$n^2 + 3n + 2 = 10(n^2 - 3n + 2)$$
$$n^2 + 3n + 2 = 10n^2 - 30n + 20 \qquad /-n^2 - 3n - 2$$
$$0 = 9n^2 - 33n + 18 \qquad /:3$$
$$0 = 3n^2 - 11n + 6$$
$$n_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4.3.6}}{2.3} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6} = \frac{11 \pm 7}{6} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow \frac{4}{6} \end{matrix}$$

Ha megnöveljük az elemszámot kettővel, a belőle képzett harmadosztályú ismétlés nélküli variációk száma 726-tal nő. Határozzuk meg az eredeti n elemszámot!

$n \geq 3$

$n \in \mathbb{N}$

$$V_3(n+2) = V_3(n) + 726$$
$$(n+2).(n+1).n = n.(n-1).(n-2) + 726$$
$$(n^2 + 3n + 2).n = n.(n^2 - 3n + 2) + 726$$
$$n^3 + 3n^2 + 2n = n^3 - 3n^2 + 2n + 726 \qquad /-n^3 - 2n$$
$$3n^2 = -3n^2 + 726 \qquad /+3n^2$$
$$6n^2 = 726 \qquad /:6$$
$$n^2 = 121 \qquad /\sqrt{}$$
$$|n| = 11$$
$$n_1 = -11 \qquad n_2 = 11$$

Mennyi elemünk van, ha a belőlük képzett negyedosztályú ismétlés nélküli variációk száma 156-szorosa a másodosztályú ismétlés nélküli variációk számának?

$n \geq 4$

$n \in \mathbb{N}$

$$V_4(n) = 156.V_2(n)$$

$$n.(n-1).(n-2).(n-3) = 156.n.(n-1) \qquad /:[n.(n-1)]$$

$$(n-2).(n-3) = 156$$

$$n^2 - 5n + 6 = 156 \qquad /-156$$

$$n^2 - 5n - 150 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.(-150)}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+600}}{2} = \frac{5 \pm 25}{2} = \begin{matrix} \nearrow 15 \\ \searrow -10 \end{matrix}$$

Számítsuk ki:

a, $\frac{15!}{3!.7!.11!}$ b, $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ c, $\frac{n^2-4}{(n+2)!} - \frac{2n+2}{(n+1)!} + \frac{3}{n!}$

a, $\frac{15!}{3!.7!.11!} = \frac{15.14.13.12.11!}{3.2.7.6.5.4.3.2.11!} = \frac{15.14.13.12}{3.2.7.6.5.4.3.2} = \frac{13}{12} = 1{,}08\overline{3}$

---

b, $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2) = n^2 + 2n + 3n + 6 = n^2 + 5n + 6$

---

c, $\frac{n^2-4}{(n+2)!} - \frac{2n+2}{(n+1)!} + \frac{3}{n!} = \frac{(n-2)(n+2)}{(n+2).(n+1).n!} - \frac{2(n+1)}{(n+1).n!} + \frac{3}{n!} = \frac{n-2}{(n+1).n!} - \frac{2}{n!} + \frac{3}{n!} = \frac{n-2}{(n+1).n!} - \frac{2.(n+1)}{(n+1).n!} + \frac{3.(n+1)}{(n+1).n!} =$

$= \frac{n-2-2.(n+1)+3.(n+1)}{(n+1).n!} = \frac{n-2-2n-2+3n+3}{(n+1)!} = \frac{2n-1}{(n+1)!}$