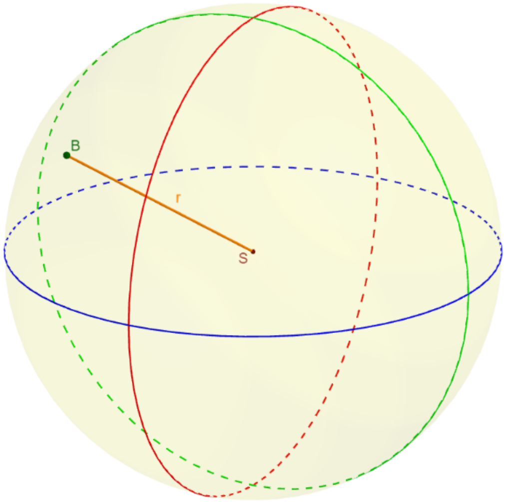
A gömb és részei felszíne és térfogata
(Povrch a objem gule a jej častí)

D. A ***gömb*** (guľa) a tér azon pontjainak a halmaza, melyeknek egy adott ponttól mért távolsága azonos vagy kisebb (legfeljebb akkora), mint egy adott pozitív érték. Ez az adott pont ***a gömb középpontja*** (stred gule) (S), az adott szám pedig ***a gömb sugarának a nagysága*** (veľkosť polomeru gule) (r).
D. A ***gömbhéj/gömbfelület*** (guľová plocha, hranica gule, sféra) a tér azon pontjainak a halmaza, melyek távolsága egy adott ponttól megegyezik egy adott pozitív számmal.

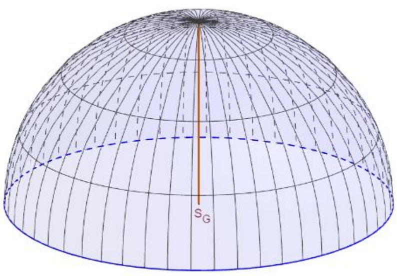


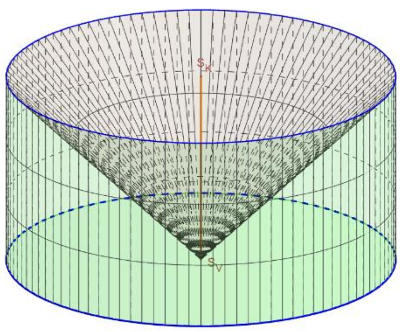
$S = 4\pi r^2$
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

A gömb egyértelműen adott sugarával – mindkét képletben szerepel a sugár. Mivel a felszínt négyzetegységekben mérjük, ezért az összefüggés r^2-et tartalmaz, a térgatok számításánál pedig köbegységeket kell kapnunk, ezért a formulában r^3 szerepel. A körrel összefüggő kerületek, területek, térfogatok számításánal mindig megjelenik a π. Ez egyedüli, amit meg kell az embernek tanulni, az együttható (szám) ezekben az összefüggésekben.

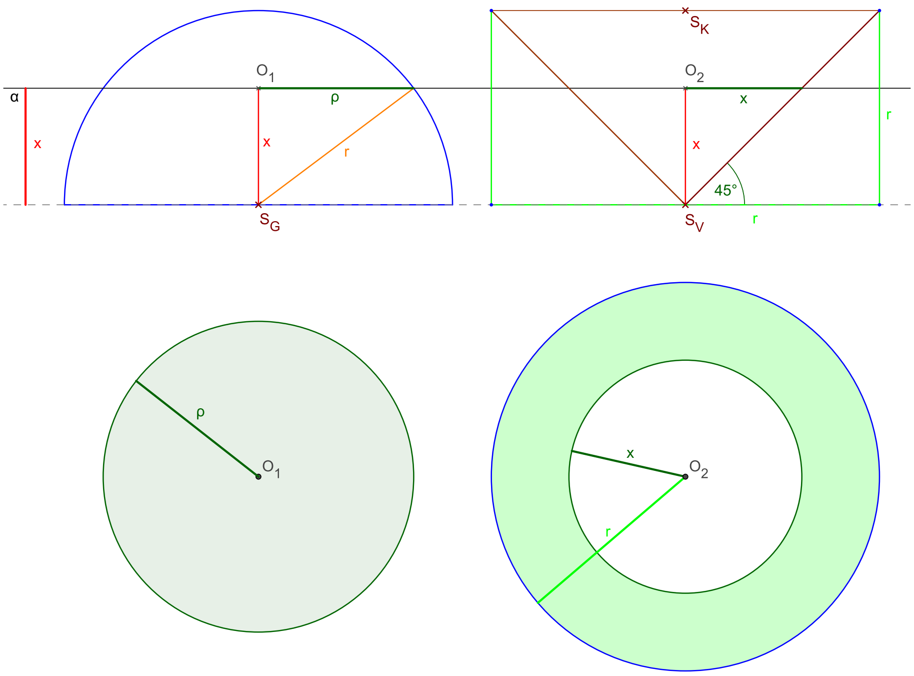
A gömg térfogatára vonatkozó képlet bizonyítása oly egyszerű, ha alkalmazunk egy összefüggést.
Cavalieri-elv: Ha van két testünk, melyek egy síkon fekszenek, és azonos az alaplapjaik területe, továbbá bármely, az alaplapok síkjával párhuzamos síkkal képzett metszeteik teülete páronként egyenlő, akkor a testek térfogata is egyenlő.

Vegyünk két testet és helyezzük egy közös vízszintes síkra:
- az első test balra egy félgömb (r sugárral)
- a másik test jobbra egy forgáshenger (r sugárral és szintén r magassággal), melyből eltávolítunk egy forgáskúpot, melynek alaplapja a henger fedőlapjával azonos, csúcsa pedig a henger alaplapjának középpontja





Síkmetszetet készítünk az alaplapok síkvával párhuzamosan egy tetszőleges x $\langle 0; r\rangle$ intervallumbeli magasságban. Az ábrán látható, hogy az első testtel vett síkmetszete egy kör, a másodikkal pedig körgyűrű.
Már csak azt kellene bebizonyítanunk, hogy a tetszőleges megengedett magasságban keletkező síkmetszetek azonos területűek.
A második ábrán az elõnézet (tengelymetszet), illetve alatta a felülnézet látható.



Számítsuk ki az egyes síkmetszetek területét:

az első metszet egy ρ sugarú kör

$S_1 = \pi.\rho^2$

az ábrán láthatjuk, hogy a ρ a derékszögű háromszög egyik befogója – Pitagorasz tétellel folytatjuk

$\rho^2 = r^2 - x^2$

ezt behelyettesítve a területbe

$S_1 = \pi.(r^2 - x^2) = \pi.r^2 - \pi.x^2$

a második metszet körgyűrű, ahol a külső körnek a sugara r

a belső kör sugarát még meg kell határoznunk – az ábrán látható, hogy a jobboldali derékszögű háromszög egyenlő szárú (két befogó r hosszúsággal)

ezért az alapon (átfogó) nyugvó szögek 45°-osak

így a kisebb derékszögű háromszögben piros befogóval és x hosszal, ezen befogó és az átfogó által bezárt szög (mint pótszög) szintén 45°-os → tehát a harmadik szögnek is 45°-osak kell lennie

ha egy háromszög két szöge egybevágó, akkor az egy egyenlő szárú háromszög

vagyis a belső kör sugara x

a körgyűrű területe a két kör területének a különbsége

$S_2 = \pi.r^2 - \pi.x^2$

$S_1 = S_2$

ezzel beláttuk, hogy egy tetszőleges magasságban keletkező síkmetszetek területe megegyezik → rátérhetünk a térfogatra

a második test térfogatát megkapjuk, ha a forgáshenger térfogatából kivonjuk a forgáskúp térfogatát

$V_2 = V_V - V_K = \pi.r^2.r - \frac{1}{3}\pi.r^2.r = \pi.r^3 - \frac{1}{3}\pi.r^3 = \frac{2}{3}\pi.r^3$

vagyis az első test (a félgömb) térfogata is ekkora

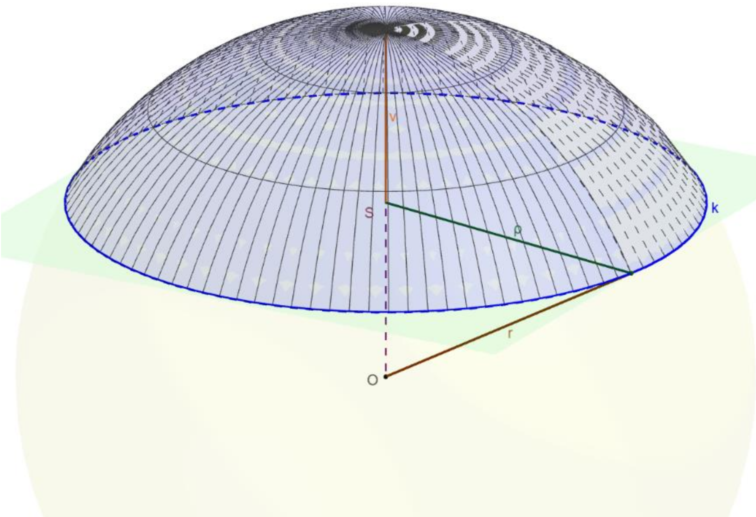
$V_1 = V_2 = \frac{2}{3}\pi.r^3$

az egész gömb térfogata ennek a kétszerese

$V = 2.V_1 = 2.\frac{2}{3}\pi.r^3 = \frac{4}{3}\pi.r^3$

1. gömbsüveg (guľový vrchlík)

D. Egy, a gömbhéjat metsző sík a gömbfelületet két ***gömbsüveg***re osztja. Alaplapja egy ρ sugarú körvonal, v magassága pedig az alaplap középponjában húzott merőleges.



Ennek a testnek nincs térfogata csak felszíne.

$S = 2\pi r v$

2. gömbszelet (guľový odsek)

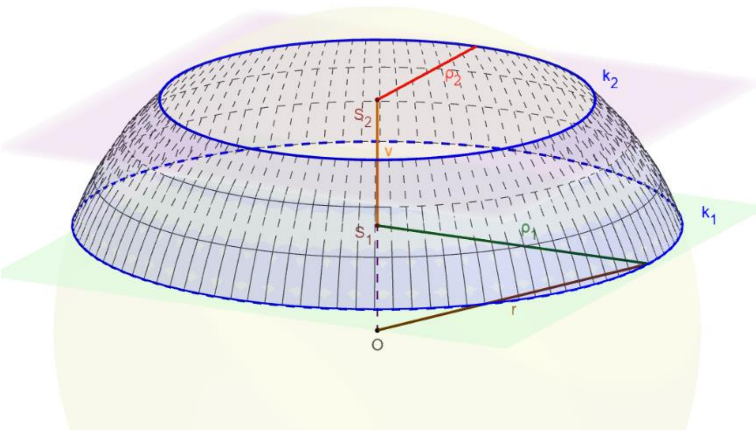
D. Egy, a gömböt metsző sík a gömböt két ***gömszelet***re osztja. A test határát alaplapja (egy ρ sugarú kör) és egy gömbsüveg alkotja.

$S = \pi\rho^2 + 2\pi r v$

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$

3. gömböv (guľový pás)

D. Két párhuzamos, a gömbhéjat metsző sík a gömbfelületet két gömbsüvegre és egy ***gömböv***re (a két sík közé eső rész) osztja. Alaplapjai ρ_1 és ρ_2 sugarú körvonalak, v magassága az alaplapok közötti távolság.



Ennek a testnek nincs térfogata csak felszíne.

$S = 2\pi r v$

4. gömbréteg (guľová vrstva)

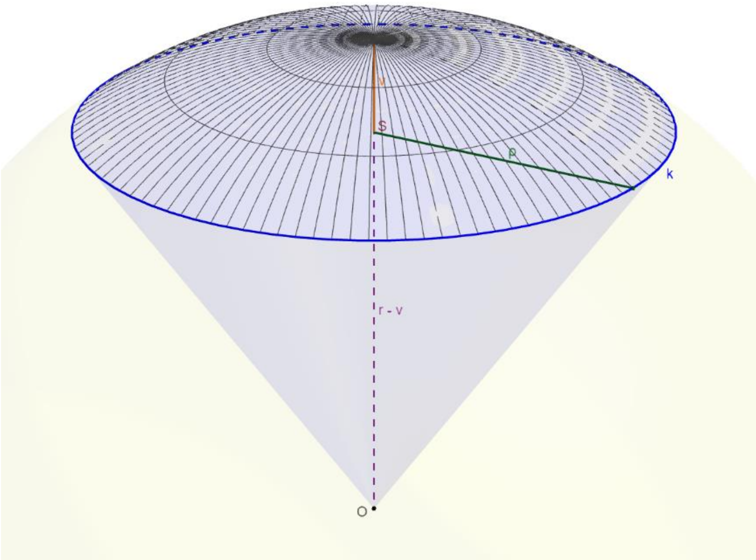
D. Két párhuzamos, a gömöt metsző sík a gömböt két gömbszeletre és egy ***gömbréteg***re (a két sík közé eső rész) osztja. A test határát két alaplapja (ρ_1 és ρ_2 sugarú körök) és egy gömböv alkotja – felszíne ezen felületek területeinek összege.

$S = \pi\rho_1^2 + \pi\rho_2^2 + 2\pi r v$

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$

5. gömbcikk (guľový výsek)

D. Egy végtelen forgáskúpfelület (csúcsával a gömb középpontjában) közös része a gömbbel a ***gömbcikk***. Ez a test tulajdonképpen egy közös alplapú forgáskúp és gömbszelet egyesítése. A test határát a forgáskúp palástja és egy gömbsüveg alkotja. A közös alaplap sugarát ρ-val jelöljük, a gömbsüveg magasságát v-vel, a gömb r sugara a forgáskúp alkotójaként szerepel, végül a forgáskúp magasságát $r - v$ adja.



$S = \pi\rho r + 2\pi r v = \pi r(\rho + 2v)$

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$

B.

a térfogatot két térfogat összegeként kapjuk: kúp + szelet

$V = V_K + V_{GO} = \frac{1}{3}\pi\rho^2(r - v) + \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2) = \frac{1}{3}\pi\rho^2 r - \frac{1}{3}\pi\rho^2 v + \frac{\pi v}{6}3\rho^2 + \frac{\pi v}{6}v^2 =$

$= \frac{1}{3}\pi\rho^2 r - \frac{1}{3}\pi\rho^2 v + \frac{1}{2}\pi\rho^2 v + \frac{1}{6}\pi v^3 = \frac{1}{3}\pi\rho^2 r + \frac{1}{6}\pi\rho^2 v + \frac{1}{6}\pi v^3$

használjuk a forgáskúpban az alaplap sugara, a magasság és az alkotó közötti összefüggést: $r^2 + v^2 = s^2$

$\rho^2 + (r - v)^2 = r^2 \rightarrow \rho^2 = r^2 - (r - v)^2 = r^2 - (r^2 - 2rv + v^2) = 2rv - v^2$

behelyettesítjük

$V = \frac{1}{3}\pi(2rv - v^2)r + \frac{1}{6}\pi(2rv - v^2)v + \frac{1}{6}\pi v^3 = \frac{2}{3}\pi r^2 v - \frac{1}{3}\pi r v^2 + \frac{1}{3}\pi r v^2 - \frac{1}{6}\pi v^3 + \frac{1}{6}\pi v^3 = \frac{2}{3}\pi r^2 v$

példa:

A vasgolyó tömege 10 *kg*, sűrűsége $\rho = 7\,800\ \frac{kg}{m^3}$. Határozzuk meg a térfogatát és a felszínét.

először a térfogatát számítjuk ki

$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{10}{7\,800} = 0{,}001\,282\ m^3 = 1{,}282\ dm^3$

$V = 1\,282{,}1\ cm^3$

a sugárral folytatjuk

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3.1\,282{,}1}{4\pi}} = \sqrt[3]{306{,}07} = 6{,}739\ cm$

behelyettesítünk a képletbe

$S = 4\pi r^2 = 4\pi.6{,}739^2$

$S = 84{,}687\ cm^2$

Egy üreges gömb térfogata 2 851. Mekkora a falvastagság, ha belső sugara 8?

az üreges gömb térfogatát két gömb térfogatának különbségeként kapjuk

$V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3$

behelyettesítjük az adatokat

$2\,851 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi.8^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 - 2\,144{,}66$

$4\,995{,}66 = = \frac{4}{3}\pi r_1^3$

$\frac{3.4\,995{,}66}{4\pi} = r_1^3$

$1\,192{,}63 = r_1^3 \rightarrow r_1 = 10{,}605$

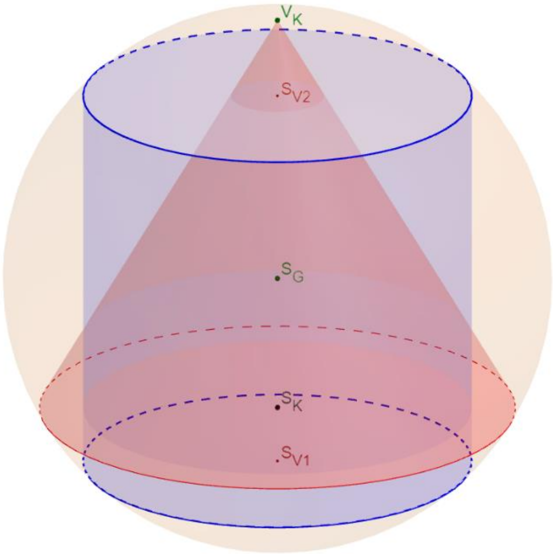
a sugarak különbsége a falvastagság

$h = 10{,}605 - 8$

$h = 2{,}605$

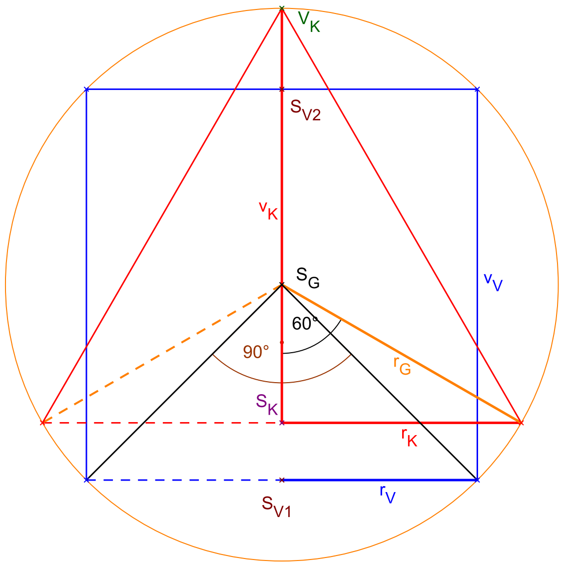
A gömbbe egy egyenlő oldalú hengert és egy egyenlő oldalú kúpot írtunk. Határozzuk meg a testek felszínének és téfogatának arányát.

a térben ezek a testek így néznek ki



a tengelymetszet segít megtalálni az összefüggéseket a felszínek és térfogatok számításához szükséges adatok között

megpróbálunk mindent a gömb sugarával kifejezni



$$(2r_V)^2 = r_G^2 + r_G^2$$
$$4r_V^2 = 2r_G^2$$
$$r_V^2 = \frac{r_G^2}{2}$$
$$r_V = \frac{r_G}{\sqrt{2}}$$

$r_V = \frac{\sqrt{2}}{2}.r_G$

$v_V = 2.r_V = \sqrt{2}.r_G$

$$\sin 60° = \frac{r_K}{r_G}$$
$$r_G.\sin 60° = r_K$$

$r_K = \frac{\sqrt{3}}{2}.r_G$

$v_K = \frac{3}{2}.r_G$

$s_K = 2r_K = \sqrt{3}.r_G$

már csak a képletekbe kell behelyettesíteni

$S_G = 4\pi r_G^2$

$S_V = 2\pi r_V^2 + 2\pi r_V.v_V = 2\pi\frac{r_G^2}{2} + 2\pi\frac{\sqrt{2}}{2}.r_G.\sqrt{2}.r_G = \pi r_G^2 + 2\pi r_G^2 = 3\pi r_G^2$

$S_K = \pi.r_K^2 + \pi.r_K.s_K = \pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_G\right)^2 + \pi.\frac{\sqrt{3}}{2}.r_G.\sqrt{3}.r_G = \frac{3}{4}\pi r_G^2 + \frac{3}{2}\pi r_G^2 = \frac{9}{4}\pi r_G^2$

felírhatjuk a testek felszínének arányát:

$S_G : S_V : S_K = 4\pi.r_G^2 : 3\pi.r_G^2 : \frac{9}{4}\pi.r_G^2$

egyszerűsítve $\pi.r_G^2$-tel ez marad

$S_G : S_V : S_K = 4 : 3 : \frac{9}{4}$

bővítjük 4-gyel, hogy ne maradjon racionális szám az arányban

$S_G : S_V : S_K = 16 : 12 : 9$

a térfogatokkal folytatjuk

$V_G = \frac{4}{3}\pi.r_G^3$

$V_V = \pi.r_V^2.v_V = \pi.\frac{r_G^2}{2}.\sqrt{2}.r_G = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.r_G^3$

$V_K = \frac{1}{3}\pi.r_K^2.v_K = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r_G\right)^2.\frac{3}{2}r_G = \frac{1}{3}\pi.\frac{3}{4}r_G^2.\frac{3}{2}r_G = \frac{3}{8}\pi.r_G^3$

felírhatjuk a testek térfogatának arányát:

$V_G : V_V : V_K = \frac{4}{3}\pi.r_G^3 : \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.r_G^3 : \frac{3}{8}\pi.r_G^3$

egyszerűsítve $\pi.r_G^3$-bel

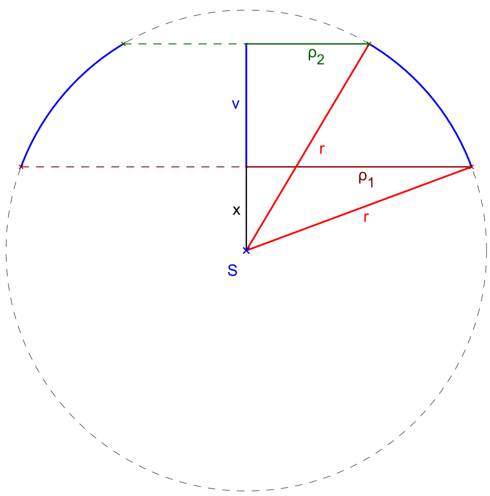
$V_G : V_V : V_K = \frac{4}{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{3}{8}$

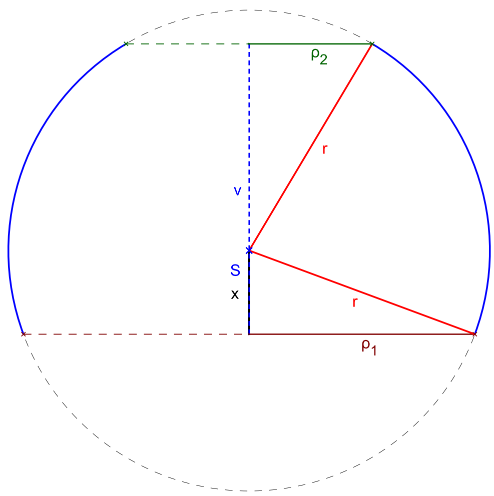
bővítjük 24-gyel, hogy ne maradjon racionális szám az arányban

$V_G : V_V : V_K = 32 : 12\sqrt{2} : 9$

Számítsuk ki a 15 magas gömbréteg felszínét és térfogatát. Alaplapjának átmérője 55, fedőlapjáé 30.

meg kell határoznunk a gömb sugarát, amelyből a gömbréteg keletkezett – a gömböv felszíne tartalmazza ezt az adatot





elméletileg a gömb középpontja lehet a gömbrétegen kívül vagy benne
az elhelyezkedését az egyenlet megoldása után tudjuk meg
ellentett értékeket kapunk → a megfelelő helyzetnél pozitív értéket kapunk

derékszögű háromszögben alkalmazzuk a Pitagorasz tételt

$$x^2 + \rho_1^2 = r^2$$
$$(v + x)^2 + \rho_2^2 = r^2$$

behelyettesítünk

$$x^2 + 27{,}5^2 = r^2$$

$(15 + x)^2 + 15^2 = r^2$

írhatjuk a baloldalak egyenlőségét

$x^2 + 27{,}5^2 = (15 + x)^2 + 15^2$

$x^2 + 756{,}25 = 225 + 30x + x^2 + 225 \qquad /-x^2$

$756{,}25 = 30x + 450 \qquad /-450$

$306{,}25 = 30x \qquad /:30$

$x = \frac{245}{24} = 10{,}208$

ebből kiszámoljuk a sugarat

$r^2 = 10{,}208^2 + 27{,}5^2 = 860{,}460$

$r = 29{,}334$ – a gömb sugara, mikor a középpont a gömbrétegen kívül van

$x^2 + \rho_1^2 = r^2$

$(v - x)^2 + \rho_2^2 = r^2$

behelyettesítünk

$x^2 + 27{,}5^2 = r^2$

$(15 - x)^2 + 15^2 = r^2$

írhatjuk a baloldalak egyenlőségét

$x^2 + 27{,}5^2 = (15 - x)^2 + 15^2$

$x^2 + 756{,}25 = 225 - 30x + x^2 + 225 \qquad /-x^2$

$756{,}25 = -30x + 450 \qquad /-450$

$306{,}25 = -30x \qquad /:(-30)$

$x = -\frac{245}{24} = -10{,}208$

mikor a gömb középpontját a gömbréteg belsejébe tettük, negatív – lehetetlen szám jött ki

már kiszámíthatjuk a felszínt

$S = \pi\rho_1^2 + \pi\rho_2^2 + 2\pi rv = \pi.27{,}5^2 + \pi.15^2 + 2\pi.29{,}334.15 = 2\,375{,}83 + 706{,}86 + 2\,764{,}63$

$S = 5\,847{,}31$

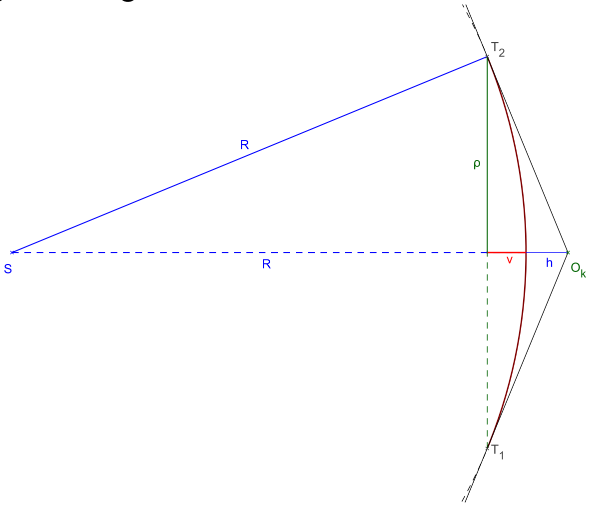
és a térfogatot is

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2) = \frac{\pi.15}{6}(3.27{,}5^2 + 3.15^2 + 15^2) = \frac{\pi.15}{6}(2\,268{,}75 + 675 + 225)$

$V = 24\,887{,}3$

A Föld felszínének hány százalékát látja a $h = 520$ *km* magasságban keringő űrállomáson lévő űrhajós? (a Föld sugara $R = 6\,370$ *km*.)

tulajdonképpen egy gömbsüveg felszínét kell kiszámolnunk



a derékszögű háromszögben Eukleidész magasságtételét alkalmazzuk: $v^2 = c_a.c_b$

$\rho^2 = (R - v).(v + h)$

a kisebbikben Pitagorasz tételt

$R^2 = \rho^2 + (R - v)^2 \;\rightarrow\; \rho^2 = R^2 - (R - v)^2$

behelyettesítjük

$R^2 - (R - v)^2 = (R - v).(v + h)$

$R^2 - (R^2 - 2Rv + v^2) = Rv + Rh - v^2 - vh$

$$R^2 - R^2 + 2Rv - v^2 = Rv + Rh - v^2 - vh \qquad /+v^2$$
$$2Rv = Rv + Rh - vh \qquad /-Rv + vh$$
$$Rv + vh = Rh$$
$$v(R + h) = Rh \qquad /:(R + h)$$
$$v = \frac{Rh}{R+h} = \frac{6\,370.520}{6\,370+520}$$
$$v = 480{,}755\ km$$

már mehet a képletbe

$$S = 2\pi Rv = 2\pi.6\,370.480{,}755$$
$$S = 19\,241\,674{,}1\ km^2$$

kiszámítjuk a földgömb felszínét

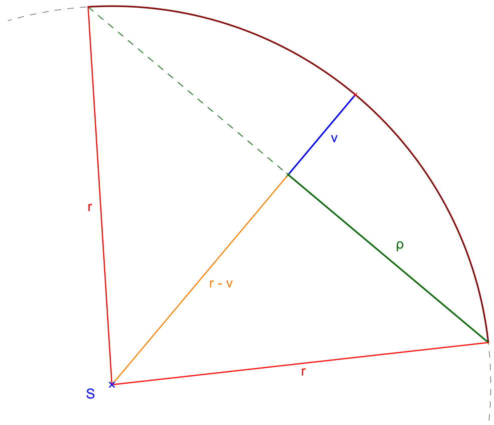
$$S_Z = 4\pi R^2 = 4\pi.6\,370^2$$
$$S_Z = 509\,904\,363{,}8\ km^2$$

százalékosan

$$\frac{S}{S_Z}.100 = \frac{19\,241\,674{,}1}{509\,904\,363{,}8} = \frac{200}{53} = 3{,}774\ \%$$

Számítsuk ki a gömbcikk felszínét és térfogatát, ha a gömbszelet, mely a cikk részét képezi, alaplapjának sugara $\rho = 10$ és magassága $v = 4$.

meg kell határoznunk a gömb sugarát



újból Pitagorasz tételt alkalmazhatunk

$$r^2 = \rho^2 + (r - v)^2$$
$$r^2 = \rho^2 + r^2 - 2rv + v^2 \qquad /-r^2$$
$$0 = \rho^2 - 2rv + v^2 \qquad /+2rv$$
$$2rv = \rho^2 + v^2 \qquad /:2v$$
$$r = \frac{\rho^2+v^2}{2v} = \frac{10^2+4^2}{2.4}$$
$$r = 14{,}5$$

behelyettesítünk

$$S = \pi\rho r + 2\pi rv = \pi.10.14{,}5 + 2\pi.14{,}5.4 = 455{,}53 + 364{,}42$$
$$S = 819{,}96$$
$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v = \frac{2}{3}\pi.14{,}5^2.4$$
$$V = 1\,761{,}39$$