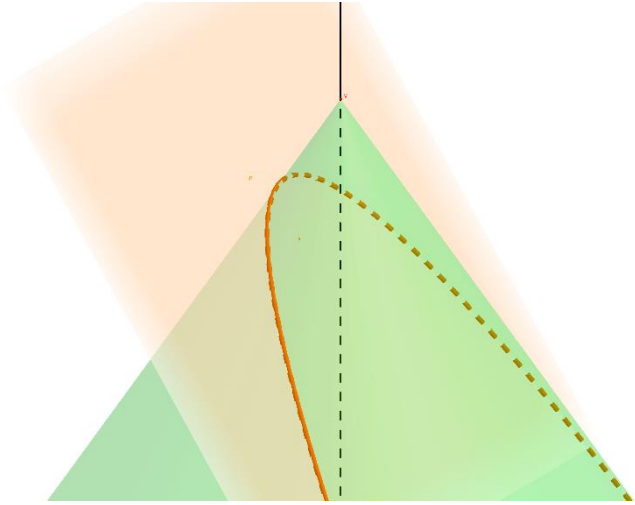
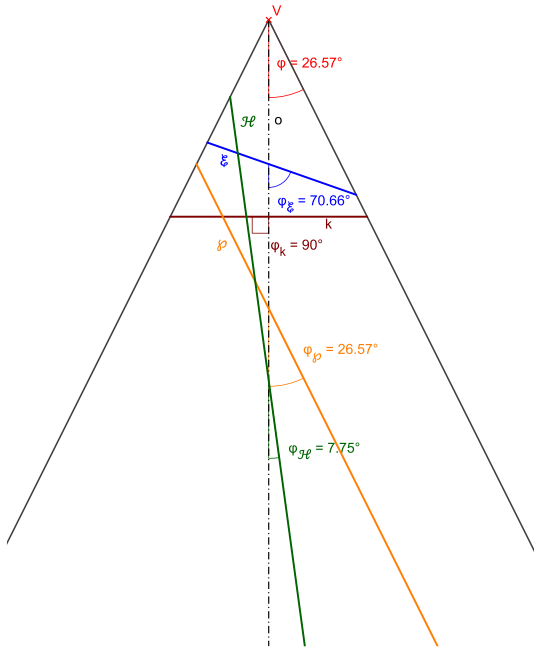


A parabola (Parabola)

koordinátageometria: másodfokú (másodrendű) alakzat, másodfokú görbe

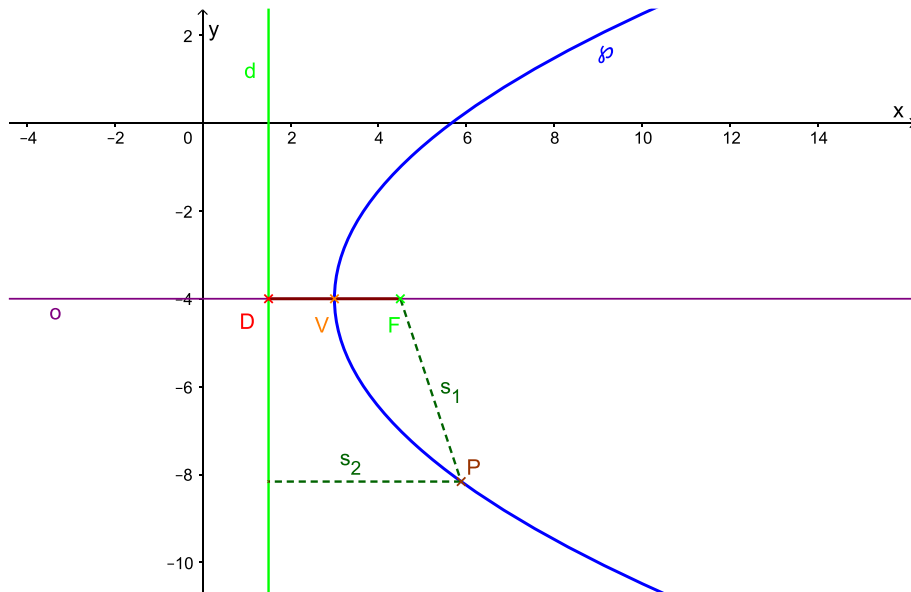
euklideszi geometria: kúpszelet (kúpfelület és sík metszsvonala) – mikor a sík párhuzamos a kúpfelület egy alkotójával



D. A **parabola** a sík azon pontjainak halmaza, melyeknek egy adott ponttól és egy adott egyenestől mért távolsága egyenlő. Az adott pont a **parabola gyújtópontja**, az adott egyenes pedig a **parabola vezéregyese**.

$$|FP| = |dP|$$

$$s_1 = s_2$$



V – a \wp csúcsa (vrchol): $V \in \wp$

F – a \wp gyújtópontja/fókusza (ohnisko)

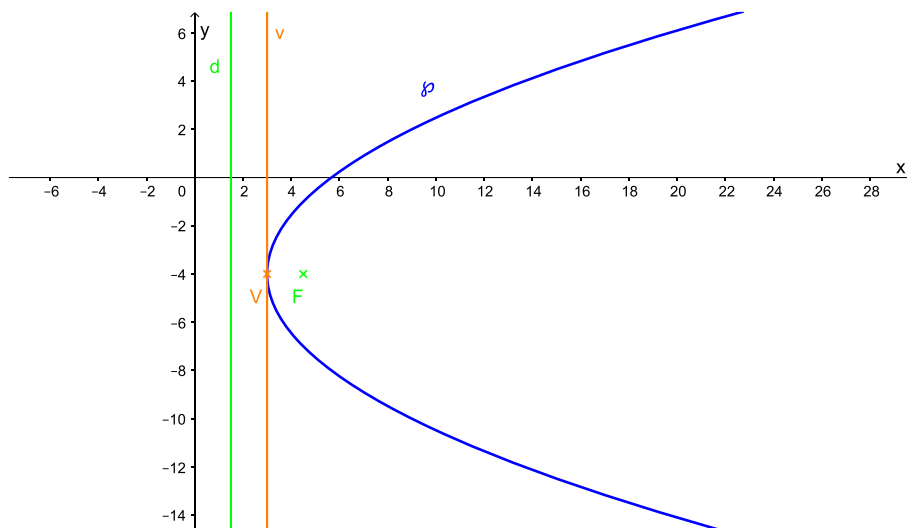
d – a \wp vezéregyese/direktrix (určujúca/riadiaca priamka)

o – a \wp tengelye (os): $F \in o$

$|Fd| = p$ – a \wp paramétere (parameter)

$o \perp d$

$s_1; s_2$ – a **P** pont vezérsugarai/rádiusz vektorok (sprievodiče)



$\wp: V(u; v); p$ – a parabola csúsponti egyenlete:

$$\wp: (x - u)^2 = \pm 2p(y - v)$$

$$\wp: (y - v)^2 = \pm 2p(x - u)$$

$$o \parallel y \text{ (álló } \wp): +2p \Rightarrow \cup; -2p \Rightarrow \cap$$

$$o \parallel x \text{ (fekvő } \wp): +2p \Rightarrow \subset; -2p \Rightarrow \supset$$

eltávolítjuk a zárójeleket, mindent egy oldalra viszünk (redukáljuk az egyenletet), rendezzük \rightarrow a parabola általános egyenlete:

$$\wp: A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0 \quad A; B; C; D; E \in \mathbb{R}$$

feltétel: $A \cdot B = 0 \wedge A + B \neq 0$ (az A és B értékekből pontosan az egyik nulla)

a parabola paraméteres egyenlete:

$$\wp: x = pt^2 + u$$

$$y = 2pt + v$$

$$\wp: x = 2pt + u$$

$$y = pt^2 + v$$

gyújtópontja koordinátái és vezéregyenesének egyenlete:

$$o \parallel y: \quad F\left(u; v \pm \frac{p}{2}\right) \quad d: y = v \mp \frac{p}{2}$$

$$o \parallel x: \quad F\left(u \pm \frac{p}{2}; v\right) \quad d: x = u \mp \frac{p}{2}$$

példa:

Írjuk fel annak a parabolának az általános egyenletét, melynek csúcsa $V(3; -5)$ és gyújtópontja $F(-1; -5)$.

mivel a gyújtópont a V csúctól balra van, ezért parabolánk fekvő helyzetű és p paramétere előjele negatív lesz

a $|VF|$ távolság a paraméter fele:

$$|VF| = |-1 - 3| = 4$$

$$p = 8$$

$$\wp: (y - (-5))^2 = -2 \cdot 8(x - 3)$$

$$(y + 5)^2 = -16(x - 3)$$

$$y^2 + 10y + 25 = -16x + 48 \quad /+16x - 48$$

$$\wp: y^2 + 16x + 10y - 23 = 0$$

Írjuk fel annak a parabolának az általános egyenletét, melynek csúcsa $V(1; 3)$, paramétere $p = 2$ és tengelye párhuzamos az y tengellyel.

$$\wp: (x - 1)^2 = \pm 2 \cdot 2(y - 3)$$

$$(x - 1)^2 = \pm 4(y - 3)$$

$$x^2 - 2x + 1 = \pm 4y \mp 12 \quad / \mp 4y \pm 12$$

$$\wp_1: x^2 - 2x - 4y + 13 = 0$$

$$\wp_2: x^2 - 2x + 4y - 11 = 0$$

Határozzuk meg a parabola V csúcsának és F gyújtópontjának koordinátáit, továbbá írjuk fel vezéregyenesének egyenletét:

$$a, \wp: 2x^2 + 20x + 24y - 46 = 0$$

$$b, \wp: 2y^2 - 6x + 9y + 10 = 0$$

$$a, \wp: 2x^2 + 20x + 24y - 46 = 0$$

$$/-24y + 46$$

szeparáljuk – a baloldalra a másodfokú és lineáris koordináta, a jobboldalra a másik koordináta és a szám

$$2x^2 + 20x = -24y + 46$$

kiemeljük a másodfokú tag együtthatóját (csak az együtthatót)

$$2(x^2 + 10x) = -24y + 46$$

a baloldalt teljes négyzetté egészítjük ki (kéttagú kifejezés négyzetére)

$$2(x^2 + 10x + 5^2) = -24y + 46 + 2 \cdot 5^2$$

$$2(x + 5)^2 = -24y + 46 + 50$$

a jobboldalon összevonjuk a számokat, majd kiemeljük a lineáris tag együtthatóját

$$2(x + 5)^2 = -24y + 96$$

$$2(x + 5)^2 = -24(y - 4) \quad /:2$$

elosztjuk a baloldaltól a zárójel előtti számmal

$$(x + 5)^2 = -12(y - 4)$$

$$V(-5; 4) \quad p = 6$$

az x-et tartalmazó zárójel van a négyzeten \Rightarrow o || y (álló parabola)

a jobboldalon a zárójel előtti szám negatív \Rightarrow a parabola szárai lefelé mutatnak (az F a V alatt van)

$$F(-5; 4 - 3) = (-5; 1)$$

$$D(-5; 4 + 3) = (-5; 7) \Rightarrow d: x = 7$$

$$b, \quad 2y^2 - 6x + 9y + 10 = 0 \quad /+6x - 10$$

$$2y^2 + 9y = 6x - 10$$

$$2\left(y^2 + \frac{9}{2}y\right) = 6x - 10$$

$$2\left(y^2 + \frac{9}{2}y + \left(\frac{9}{4}\right)^2\right) = 6x - 10 + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

$$2\left(y + \frac{9}{4}\right)^2 = 6x - 10 + 2 \cdot \frac{81}{16}$$

$$2\left(y + \frac{9}{4}\right)^2 = 6x - 10 + \frac{81}{8}$$

$$2\left(y + \frac{9}{4}\right)^2 = 6x + \frac{1}{8}$$

$$2\left(y + \frac{9}{4}\right)^2 = 6\left(x + \frac{1}{48}\right) \quad /:2$$

$$\left(y + \frac{9}{4}\right)^2 = 3\left(x + \frac{1}{48}\right)$$

$$V\left(-\frac{1}{48}; -\frac{9}{4}\right) \quad p = \frac{3}{2}$$

az y-t tartalmazó zárójel van a négyzeten \Rightarrow o || x (fekvő parabola)

a jobboldalon a zárójel előtti szám pozitív \Rightarrow a parabola szárai jobbra mutatnak (az F jobbra van a V-től)

$$F\left(-\frac{1}{48} + \frac{3}{4}; -\frac{9}{4}\right) = \left(\frac{35}{48}; -\frac{9}{4}\right)$$

$$D\left(-\frac{1}{48} - \frac{3}{4}; -\frac{9}{4}\right) = \left(-\frac{37}{48}; -\frac{9}{4}\right) \Rightarrow d: x = -\frac{37}{48}$$