Nezávislé pokusy

V urne sú biele a čierne gule: 16 bielych a 20 čiernych. Aká je pravdepodobnosť toho, že ak vytiahneme z nich päť, budú to 3 biele a 2 čierne?

Mohli by sme urobiť náš náhodný pokus tým spôsobom, že naraz vytiahneme 5 gúľ. Ale to isté dosiahneme ak vytiahneme jednu guľu, dáme bokom a tak pokračujeme aj s ďalšími. Ako keby som rozdelil náhodný jav na elementárne javy → na 5 pokusov. Ale v skutočnosti nie sú to elementárne javy ktoré ak zjednotím (vynásobím ich pravdepodobnosti), dostanem hľadanú pravdepodobnosť. Z tej hodnoty ale môžem istým spôsobom vypočítať správnu odpoveď.

predpokladajme, že najprv vytiahneme tie tri biele a potom dve čierne
počítajme postupne každý jeden krok pokusu

pravdepodobnosť vytiahnutia prvej bielej gule sa rovná: $P(A_1) = \frac{16}{36}$

keď ťahám druhú bielu guľu v urne mám už iba 15 bielych z celkového počtu 35: $P(A_2) = \frac{15}{35}$

pri treťom ťahu mi ostal 14 bielych gúľ: $P(A_3) = \frac{14}{34}$

teraz sú na rade čierne – mám 20 čiernych ale dokopy už iba 33 gúľ: $P(A_4) = \frac{20}{33}$

a posledná čierna má pravdepodobnosť: $P(A_5) = \frac{19}{32}$

A čím som ešte nerátal? Prečo obyčajný súčin týchto pravdepodobností nie je odpoveď na otázku? Odpoveď je jednoduchá. Veď som rátal tú možnosť, keď prvé tri gule budú biele a potom idú čierne. Ale cieľ môžem dosiahnuť aj s inakším poradím. Čiže s poradím som nerátal.

určenie všetkých možných poradí je kombinatorický problém – máme päť voľných miest a z toho máme obsadiť tri miesta ktoré sú rovnocenné (čiže pri ktorých ťahoch bude guľa biela)
sú to kombinácie (nezáleží na poradí, lebo tie biele gule sú rovnaké) tretej triedy z piatich prvkov

$C_3(5) = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = 10$

{bbbčč; bbčbč; bčbbč; čbbbč; bbččb; bčbčb; čbbčb; bččbb; čbčbb; ččbbb}

P. To isté by sme dostali, keby sme sa sústredili na čierne gule – pri ktorých ťahoch vytiahnem čiernu. Medzi vlastnosťami kombinačných čísel sme mali tú vetu $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

teraz už iba vynásobiť tých šesť čísel

$P(A) = P(A_1).P(A_2).P(A_3).P(A_4).P(A_5).C_3(5) = \frac{16}{36}.\frac{15}{35}.\frac{14}{34}.\frac{20}{33}.\frac{19}{32}.10 = 0{,}282\ 2$

P. Túto hodnotu by sme mohli dostať aj iným spôsobom. Z klasickej definície pravdepodobnosti.

počet priaznivých možností: Koľkými spôsobmi môžem vytiahnuť 3 biele zo 16 a k tomu 2 čierne z 20?

$m = C_3(16).C_2(20) = 560.190 = 106\ 400$

počet všetkých možností: Koľkými spôsobmi môžem vytiahnuť 5 gúľ z 36?

$n = C_5(36) = 376\ 992$

$P(A) = \frac{106\ 400}{376\ 992} = 0{,}282\ 2$

Pri tomto pokuse ale výsledok každého „elementárneho javu" ovplyvní ďalší ťah. Čiže pokusy (tých 5, na ktoré som rozdelil pôvodný pokus) nie sú nezávislé. Zmeňme preto pôvodné zadanie.

V urne sú biele a čierne gule: 16 bielych a 20 čiernych. Robíme päť pokusov tak, že z nich vytiahneme jednu guľu a hneď ju vrátime. Aká je pravdepodobnosť toho, budú to 3 biele a 2 čierne?

To už iba tým jediným spôsobom môžeme počítať. Určíme pravdepodobnosti pri jednotlivých pokusoch vytiahnutia bielej potom čiernej gule (čo pri pokusoch sa nemení, lebo vždy vrátim guľu – ich pomer ostáva). A takisto započítavam aj zmenu poradia vytiahnutia bielych a čiernych gúľ.

znovu predpokladajme jedno z možných poradí: najprv trikrát biele a potom dvakrát čierne
pravdepodobnosť vytiahnutia bielej gule pri prvých troch pokusoch je rovnaká:

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{16}{36}$

pravdepodobnosť vytiahnutia čiernej gule pri posledných dvoch pokusoch je takisto rovnaká:

$P(A_4) = P(A_5) = \frac{20}{36}$

a počet všetkých možných poradí sa počíta rovnako

$C_3(5) = 10$

teraz už iba vynásobiť

$P(A) = \frac{16}{36}.\frac{16}{36}.\frac{16}{36}.\frac{20}{36}.\frac{20}{36}.10 = 0{,}271\ 0$

A práve takéto pokusy sa volajú nezávislými pokusmi. Výsledok predchádzajúcich pokusov neovplyvní priebeh ďalšieho pokusu. Pravdepodobnosť nastania javu vždy je rovnaká v každom pokuse.

V. (*Bernoulli*)

$P(x) = \binom{n}{x}p^x.q^{n-x} = \binom{n}{x}p^x.(1-p)^{n-x}$

n – označuje celkový počet pokusov

x – označuje počet priaznivých pokusov (že nastane ten jav pre ktorý počítam pravdepodobnosť)

p – označuje pravdepodobnosť nastania javu pri každom z pokusov

q – označuje pravdepodobnosť nenastania javu (opačný jav) ⇒ q = 1 – p

Náš úvodný príklad by znel podľa toho nasledovne:

V urne sú biele a čierne gule: 16 bielych a 20 čiernych. Robíme päť nezávislých pokusov tak, že z nich vytiahneme jednu guľu a hneď ju vrátime. Aká je pravdepodobnosť toho, že práve 3 budú biele?

$n = 5;\ x = 3;\ p = \frac{16}{36};\ q = \frac{20}{36}$

príklad:

Robíme 6 nezávislých pokusov. Pravdepodobnosť úspechu v každom pokuse je 80 %. Vypočítajte pravdepodobnosti, že budeme úspešní práve x-krát, pre x = 0, 1, 2, …, 6.

$n = 6$

$p = 0{,}8 \rightarrow q = 0{,}2$

$P(0) = \binom{6}{0}.0{,}8^0.0{,}2^6 = 1.1.0{,}000\ 064 = 0{,}000\ 064$

$P(1) = \binom{6}{1}.0{,}8^1.0{,}2^5 = 6.0{,}8.0{,}000\ 32 = 0{,}001\ 536$

$P(2) = \binom{6}{2}.0{,}8^2.0{,}2^4 = 15.0{,}64.0{,}001\ 6 = 0{,}015\ 36$

$P(3) = \binom{6}{3}.0{,}8^3.0{,}2^3 = 20.0{,}512.0{,}008 = 0{,}081\ 92$

$P(4) = \binom{6}{4}.0{,}8^4.0{,}2^2 = 15.0{,}409\ 6.0{,}04 = 0{,}245\ 76$

$P(5) = \binom{6}{5}.0{,}8^5.0{,}2^1 = 6.0{,}327\ 68.0{,}2 = 0{,}393\ 216$

$P(6) = \binom{6}{6}.0{,}8^6.0{,}2^0 = 1.0{,}262\ 144.1 = 0{,}262\ 144$