Variácie bez opakovania

usporiadaná k-tica (prvkov) – k prvkov v danom poradí (záleží na poradí)

zápis: $[x_1; x_2; x_3; \dots ; x_k]$ alebo $(x_1; x_2; x_3; \dots ; x_k)$

$(x_1; x_2; \dots ; x_i; \dots ; x_j; \dots ; x_k) = (x_1; x_2; \dots ; x_j; \dots ; x_i; \dots ; x_k) \Leftrightarrow x_i = x_j$

D. ***Variácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania*** sú všetky usporiadané k-tice vytvorené z n prvkovej množiny, kde prvky sa nemôžu opakovať v jednotlivých k-ticiach.

P. Keďže napríklad z päťprvkovej množiny nevieme vytvoriť usporiadané šestice bez toho, aby sme nepoužili aspoň jeden prvok viackrát (čo nie je dovolené), hodnota k môže byť najviac n (špeciálny prípad variácií, ak $k = n \rightarrow$ tie budú takzvané permutácie):

$k < n$

V. Počet variácií bez opakovania môžeme vypočítať vzorcom:

$$V_k(n) = \underbrace{n.(n-1).(n-2).\dots.(n-k+1)}_{\text{k činiteľov}}$$

P. Na kalkulačkách variácie bez opakovania môžete nájsť (avšak nie na každej vedeckej) ako funkciu *nPr*.

D. ***Faktoriál*** prirodzeného čísla je súčin prirodzených čísel od jedna po to číslo.

$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ tento tvar je výhodnejší pri úpravách

$0! := 1$

P. Faktoriál nájdete na vedeckých kalkulačkách: funkcia *x*! alebo *n*!. Avšak kalkulačky sú obmedzené vo výpočtoch. Najväčšie číslo čo ešte zobrazuje kalkulačka je: 9.999999999^{99} čo znamená číslo $9{,}999\,999\,999.10^{99}$ – čiže desatinná čiara posunutá o 99 miest doprava. Preto najväčšia číslo pre ktoré ešte vie zobraziť faktoriál je $69! = 1.711224524^{98}$. Faktoriál existuje aj pre väčšie hodnoty, iba kalkulačka ho nevie zobraziť (pr. v Exceli: FACT(100) = 100! = 9,33262154439442E+157 = $9{,}33262154439442.10^{157}$).

P. Faktoriál väčšieho čísla je väčšia hodnota. Preto faktoriál väčšieho čísla alebo výrazu môžeme vyjadriť faktoriálom menšieho čísla alebo výrazu.

$10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1$
$8! = 8.7.6.5.4.3.2.1$
$10! = 10.9.8!$

$(n+3)! = (n+3).(n+2).(n+1).n.(n-1).(n-2) \cdot \ldots \cdot 3.2.1$
$n! = n.(n-1).(n-2) \cdot \ldots \cdot 3.2.1$
$(n+3)! = (n+3).(n+2).(n+1).n!$

$(n-2)! = (n-2).(n-3) \cdot \ldots \cdot 3.2.1$
$n! = n.(n-1).(n-2)!$

V. Zavedením pojmu faktoriál vzorec na výpočet variácií bez opakovania prejde do tvaru:

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

príklad:

Utvorte všetky variácie tretej triedy bez opakovania z prvkov a, b, c, d, e.

systematicky musíme postupovať, aby sme nevynechali ani jednu usporiadanú trojicu, alebo nenapísali viackrát

[*a*; *b*; *c*], [*a*; *b*; *d*], [*a*; *b*; *e*], [*a*; *c*; *b*], [*a*; *c*; *d*], [*a*; *c*; *e*],
[*a*; *d*; *b*], [*a*; *d*; *c*], [*a*; *d*; *e*], [*a*; *e*; *b*], [*a*; *e*; *c*], [*a*; *e*; *d*],
[*b*; *a*; *c*], [*b*; *a*; *d*], [*b*; *a*; *e*], [*b*; *c*; *a*], [*b*; *c*; *d*], [*b*; *c*; *e*],
[*b*; *d*; *a*], [*b*; *d*; *c*], [*b*; *d*; *e*], [*b*; *e*; *a*], [*b*; *e*; *c*], [*b*; *e*; *d*],
[*c*; *a*; *b*], [*c*; *a*; *d*], [*c*; *a*; *e*], [*c*; *b*; *a*], [*c*; *b*; *d*], [*c*; *b*; *e*],
[*c*; *d*; *a*], [*c*; *d*; *b*], [*c*; *d*; *e*], [*c*; *e*; *a*], [*c*; *e*; *b*], [*c*; *e*; *d*],
[*d*; *a*; *b*], [*d*; *a*; *c*], [*d*; *a*; *e*], [*d*; *b*; *a*], [*d*; *b*; *c*], [*d*; *b*; *e*],
[*d*; *c*; *a*], [*d*; *c*; *b*], [*d*; *c*; *e*], [*d*; *e*; *a*], [*d*; *e*; *b*], [*d*; *e*; *c*],
[*e*; *a*; *b*], [*e*; *a*; *c*], [*e*; *a*; *d*], [*e*; *b*; *a*], [*e*; *b*; *c*], [*e*; *b*; *d*],
[*e*; *c*; *a*], [*e*; *c*; *b*], [*e*; *c*; *d*], [*e*; *d*; *a*], [*e*; *d*; *b*], [*e*; *d*; *c*]

Koľko usporiadaných štvoríc možno utvoriť z desiatich prvkov, ak sa v nich ani jeden prvok neopakuje?

$V_4(10) = 10.9.8.7 = 5\,040$

Koľko rôznych prirodzených päťciferných čísel možno zostaviť z číslic 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, ak sa ani jedna číslica neopakuje?

$V_5(7) = 7.6.5.4.3 = 2\,520$

Koľko rôznych prirodzených päťciferných čísel možno zostaviť z číslic 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6, ak sa ani jedna číslica neopakuje?

aj teraz máme sedem prvkov, lenže máme tu nulu, čo nemôže ísť na prvé miesto – potom číslo by bolo iba štvorciferné

počítajme bez vzorca – na prvé miesto: šesť možností (bez nuly)

na druhé miesto: znovu šesť možností (aj s nulou); tretie miesto: päť; štvrté: štyri; piate: tri

$6.6.5.4.3 = 2\,160$

A ako by sme mali počítať vzorcom?

vypočítať päťciferné (spolu aj s tými číslami, kde na prvom mieste je nula)

a z tohto počtu odrátať toľko, koľko z tých vytvorených čísel sa začína nulou – čiže počet štvorciferných čísel zostavených z číslic bez nuly (1; 2; 3; 4; 5; 6)

$V_5(7) - V_4(6) = 7.6.5.4.3 - 6.5.4.3 = 2\,520 - 360 = 2\,160$

Koľko rôznych párnych štvorciferných čísel možno zostaviť z číslic 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, ak sa ani jedna číslica neopakuje?

číslo je párne, ak končí párnym číslom

preto teraz začneme od konca

na poslednú pozíciu (na štvrté miesto) môže ísť iba 2; 4 alebo 6 – tri možnosti

na tretiu šesť (jednu sme už použili); druhú päť; na prvú pozíciu ostali štyri číslice

$3.6.5.4 = 360 = 3.V_3(6)$

Koľko rôznych párnych štvorciferných čísel možno zostaviť z číslic 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8, ak sa ani jedna číslica neopakuje?

teraz zo siedmych číslic sú štyri párne – na poslednú pozíciu máme štyri možnosti

$4.6.5.4 = 480 = 4.V_3(6)$

Koľko rôznych párnych štvorciferných čísel možno zostaviť z číslic 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6, ak sa ani jedna číslica neopakuje?

nula nám komplikuje príklad: nemôže byť na začiatku (vzniknuté číslo by nebolo štvorciferné), ale na konci s nulou vznikne párne číslo

preto rozoberáme výpočty: ak číslo končí nulou ↔ a keď nie

ak je na konci nula, potom predchádzajúce tri miesta máme vyplniť zvyšnými číslicami

$V_3(6) = 120$

ak nekončí nulou, potom musí končiť 2; 4 alebo 6 – to znamená tri možnosti

pokračujeme prvou pozíciou: zvyšné číslice ale bez nuly – päť možností (1; 2; 3; 4; 5; 6 – bez jednej párnej, čo už sme použili na konci)

druhé miesto znovu päť možností – zvyšné štyri a nula

a na tretiu pozíciu ostali štyri číslice

$3.5.5.4 = 300$

súčet tých dvoch výpočtov je odpoveď na otázku

$120 + 300 = 420$

Koľko rôznych prvkov dá 1 806 variácií druhej triedy bez opakovania?

$n \geq 2 \wedge n \in \mathbb{N}$

$$V_2(n) = 1\,806$$

$$n.(n-1) = 1\,806$$

$$n^2 - n = 1\,806 \qquad /-1\,806$$

$$n^2 - n - 1\,806 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1\,806)}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 7\,224}}{2} = \frac{1 \pm 85}{2} = \begin{matrix} \nearrow 43 \\ \searrow -42 \end{matrix}$$

Z koľkých rôznych prvkov možno utvoriť 35 904 variácií tretej triedy bez opakovania?

$n \geq 3 \land n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} V_3(n) &= 35\,904 \\ n.(n-1).(n-2) &= 35\,904 \\ n.(n^2 - 3n + 2) &= 35\,904 \\ n^3 - 3n^2 + 2n &= 35\,904 \\ n^3 - 3n^2 + 2n - 35\,904 &= 0 \end{aligned}$$

$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + \mathit{3n} - \mathit{1} \approx n^3 - 3n^2 + \mathit{2n}$, preto

$$(n-1)^3 \approx 35\,904$$

$$n - 1 \approx \sqrt[3]{35\,904} = 32{,}99 \quad \Rightarrow \quad n = 34$$

Ak sa zväčší počet prvkov n o dva, zväčší sa počet variácií tretej triedy 10-krát. Koľko prvkov je daných?

$n \geq 3 \land n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} V_3(n+2) &= 10.V_3(n) \\ (n+2).(n+1).n &= 10.n.(n-1).(n-2) && /:n \\ n^2 + 3n + 2 &= 10(n^2 - 3n + 2) \\ n^2 + 3n + 2 &= 10n^2 - 30n + 20 && /-n^2 - 3n - 2 \\ 0 &= 9n^2 - 33n + 18 && /:3 \\ 0 &= 3n^2 - 11n + 6 \end{aligned}$$

$$n_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4.3.6}}{2.3} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6} = \frac{11 \pm 7}{6} = \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow \frac{4}{6} \end{matrix}$$

Ak zväčšíme počet prvkov o dva, zväčší sa počet variácií tretej triedy bez opakovania o 726. Určte pôvodný počet prvkov n.

$n \geq 3 \land n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} V_3(n+2) &= V_3(n) + 726 \\ (n+2).(n+1).n &= n.(n-1).(n-2) + 726 \\ (n^2 + 3n + 2).n &= n.(n^2 - 3n + 2) + 726 \\ n^3 + 3n^2 + 2n &= n^3 - 3n^2 + 2n + 726 && /-n^3 - 2n \\ 3n^2 &= -3n^2 + 726 && /+3n^2 \\ 6n^2 &= 726 && /:6 \\ n^2 &= 121 && /\sqrt{} \\ |n| &= 11 \end{aligned}$$

$n_1 = -11 \qquad n_2 = 11$

Koľko je daných prvkov, ak z nich utvorených variácií štvrtej triedy bez opakovania je 156-krát viac ako variácií druhej triedy?

$n \geq 4 \land n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} V_4(n) &= 156.V_2(n) \\ n.(n-1).(n-2).(n-3) &= 156.n.(n-1) && /:[n.(n-1)] \\ (n-2).(n-3) &= 156 \\ n^2 - 5n + 6 &= 156 && /-156 \\ n^2 - 5n - 150 &= 0 \end{aligned}$$

$$n_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.1.(-150)}}{2.1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 600}}{2} = \frac{5 \pm 25}{2} = \begin{matrix} \nearrow 15 \\ \searrow -10 \end{matrix}$$

Vypočítajte:

a, $\frac{15!}{3!.7!.11!}$ b, $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$ c, $\frac{n^2-4}{(n+2)!} - \frac{2n+2}{(n+1)!} + \frac{3}{n!}$

a, $$\frac{15!}{3!.7!.11!} = \frac{15.14.13.12.11!}{3.2.7.6.5.4.3.2.11!} = \frac{15.14.13.12}{3.2.7.6.5.4.3.2} = \frac{13}{12} = 1{,}08\overline{3}$$

b, $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = (n+3)(n+2) = n^2 + 2n + 3n + 6 = n^2 + 5n + 6$

---

c, $\frac{n^2-4}{(n+2)!} - \frac{2n+2}{(n+1)!} + \frac{3}{n!} = \frac{(n-2)(n+2)}{(n+2).(n+1).n!} - \frac{2(n+1)}{(n+1).n!} + \frac{3}{n!} = \frac{n-2}{(n+1).n!} - \frac{2}{n!} + \frac{3}{n!} = \frac{n-2}{(n+1).n!} - \frac{2.(n+1)}{(n+1).n!} + \frac{3.(n+1)}{(n+1).n!} =$

$= \frac{n-2-2.(n+1)+3.(n+1)}{(n+1).n!} = \frac{n-2-2n-2+3n+3}{(n+1)!} = \frac{2n-1}{(n+1)!}$